Anno scolastico 2009 - 2010 Classe: 4^ "A" L.T.C. Allievo: .....

Probema di Marek. (Problema dei quattro punti inaccessibili).

Sommario

Il problema che risale al 1875 è tratto da: "Technischen anleitung zur ausfuhrung der trigonometrischen operationen des kataster im auftrage des konigl. Ungarischen Finanz Ministeriums verfasst von I. Marek – Budapest 1875, pag. 259"

Sono noti 4 punti in coordinate cartesiane

$X_A \equiv 100.41m$	$X_B \equiv 600.68m$	$X_C \equiv 1500.11m$	$X_D \equiv 1950.75m$
$Y_A \equiv 350.55m$	$Y_B \equiv 500.17m$	$Y_C \equiv 450.07m$	$Y_D \equiv 400.70m$

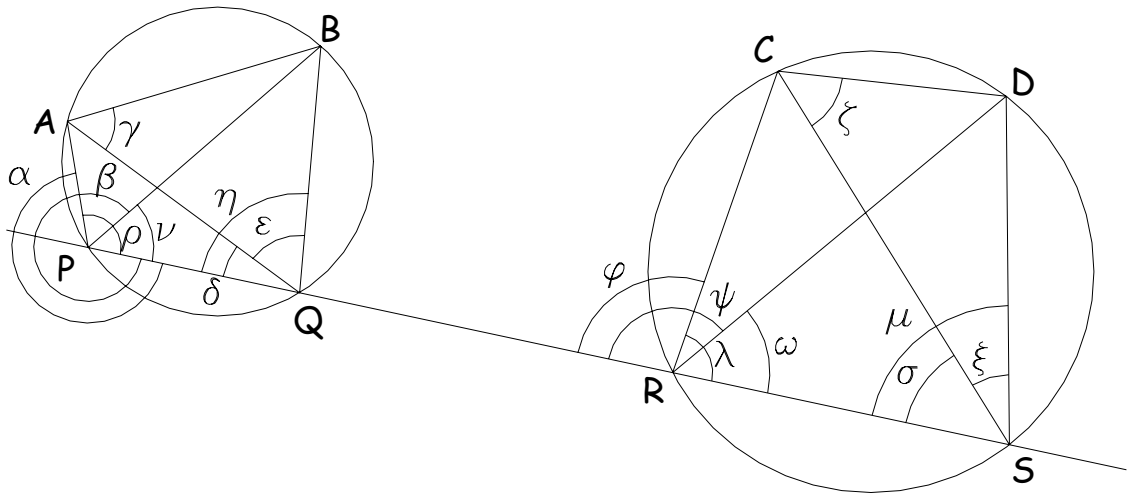
Da un punto chiamato P, stazionabile, è possibile eseguire letture angolari di direzione collimando con un teodolite i punti A, B e un terzo punto chiamato R, anch'esso stazionabile e dal quale è possibile la collimazione dei punti C, D oltre che P.

$\theta_{PA} \equiv 332.5665deg$	$\theta_{PB} \equiv 30.7790deg$	$\theta_{PR} \equiv 84.1355deg$
$\theta_{RC} \equiv 5.2695deg$	$\theta_{RD} \equiv 36.2985deg$	$\theta_{RP} \equiv 268.4150deg$

La soluzione del problema fornisce le coordinate cartesiane dei due punto P, R

La figura si disegna tenendo conto dell'ubicazione dei punti "P" rispetto ad "A" e "B" e "R" rispetto a "C" e "D". Nel caso in questione si hanno i punti "A", "B", "C" e "D" tutti a sinistra della congiungente i punti "P" ed "R" per un osservatore che da "P" guarda verso "R".

Riportando su un sistema cartesiano approssimativamente le posizioni reciproche di punti sopra richiamati, è possibile tracciare le circonferenze che passano per "A", "B", "P" e "C", "D", "R":
1) si tracciano gli assi dei segmenti AB, AP, CD e CR;
2) l'intersezione dei primi due fornisce l'ubicazione del centro della prima circonferenza e l'intersezione dei secondi due fornisce l'ubicazione del centro della seconda circonferenza;
3) la retta passante per i punti "P" ed "R" individua i punti "Q" ed "S" sulla rispettive circonferenze (punti di Collins);
4) i segmenti BP, AQ, BQ, DR, CS e DS;
5) l'indicazione degli angoli permette di seguire la procedura risolutiva proposta del problema.



RISULTATI

$X_P = 141.92\,m$	$X_R = 1293.03\,m$
$Y_P = 99.10\,m$	$Y_R = -149.67\,m$

PROCEDURA DI CALCOLO (CASO ILLUSTRATO IN FIGURA)

1) Calcolo degli angoli in "P" e in "R"

$$\alpha \equiv \theta_{PA} - \theta_{PR} \qquad \alpha = 248.4310\,deg$$

$$\beta \equiv \theta_{PB} - \theta_{PR} + 2\pi \qquad \beta = 306.6435\,deg$$

$$\phi \equiv \theta_{RC} - \theta_{RP} + 2\pi \qquad \phi = 96.8545\,deg$$

$$\psi \equiv \theta_{RD} - \theta_{RP} + 2\pi \qquad \psi = 127.8835\,deg$$

2) Calcolo degli elementi del triangolo ABQ

$$AB \equiv \sqrt{\left(X_B - X_A\right)^2 + \left(Y_B - Y_A\right)^2} \qquad AB = 522.16\,m$$

$$\Phi_{AB} \equiv atan\left(\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}\right) \qquad \Phi_{AB} = 73.3492\,deg$$

$$\Phi_{BA} \equiv \Phi_{AB} + \pi \qquad \Phi_{BA} = 253.35\,deg$$

$$\gamma \equiv 2\pi - \beta \qquad \gamma = 53.3565\,deg$$

uguali perchè insistono sulla stessa corda

$$\varepsilon \equiv \beta - \alpha \qquad \varepsilon = 58.2125\,deg$$

uguali perchè insistono sulla stessa corda

$$AQ \equiv \frac{AB \cdot \sin(\varepsilon + \gamma)}{\sin(\varepsilon)} \qquad AQ = 571.29\,m$$

$$BQ \equiv \frac{AB \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\varepsilon)} \qquad BQ = 492.90\,m$$

3) Calcolo degli azimut e dei controazimut dei lati

$$\Phi_{AQ} \equiv \Phi_{AB} + \gamma \qquad \Phi_{AQ} = 126.7057\,deg$$

$$\Phi_{QA} \equiv \Phi_{AQ} + \pi \qquad \Phi_{QA} = 306.7057\,deg$$

$$\Phi_{BQ} \equiv \Phi_{BA} - \left[\pi - \left(\gamma + \varepsilon\right)\right] \qquad \Phi_{BQ} = 184.9182\,deg$$

$$\Phi_{QB} \equiv \Phi_{BQ} - \pi \qquad \Phi_{QB} = 4.9182\,deg$$

4) Calcolo delle coordinate del primo punto di collins "Q"

$$X_Q \equiv X_A + AQ \cdot \sin\left(\Phi_{AQ}\right) \qquad X_Q = 558.42\,m$$

$$Y_Q \equiv Y_A + AQ \cdot \cos\left(\Phi_{AQ}\right) \qquad Y_Q = 9.09\,m$$

e per verifica:

$$X_{Qv} \equiv X_B + BQ \cdot \sin\left(\Phi_{BQ}\right) \qquad X_{Qv} = 558.42\,m$$

$$Y_{Qv} \equiv Y_B + BQ \cdot \cos\left(\Phi_{BQ}\right) \qquad Y_{Qv} = 9.09\,m$$

5) Calcolo degli elementi del triangolo CDS

$$CD \equiv \sqrt{\left(X_D - X_C\right)^2 + \left(Y_D - Y_C\right)^2} \qquad CD = 453.34\,m$$

$$\Phi_{CD} \equiv \operatorname{atan}\left(\frac{X_D - X_C}{Y_D - Y_C}\right) + \pi \qquad \Phi_{CD} = 96.2521\,deg$$

$$\Phi_{DC} \equiv \Phi_{CD} + \pi \qquad \Phi_{DC} = 276.25\,deg$$

$$\zeta \equiv \pi - \psi \qquad \zeta = 52.1165\,deg$$

uguali perchè insistono sulla stessa corda

$$\xi \equiv \psi - \phi \qquad \xi = 31.0290\,deg$$

uguali perchè insistono sulla stessa corda

$$DS \equiv \frac{CD \cdot \sin(\zeta)}{\sin(\xi)} \qquad DS = 694.12\,m$$

$$CS \equiv \frac{CD \cdot \sin(\xi + \zeta)}{\sin(\xi)} \qquad CS = 873.17\,m$$

6) Calcolo degli azimut e dei controazimut dei lati

$$\Phi_{CS} \equiv \Phi_{CD} + \zeta \qquad \Phi_{CS} = 148.3686\,deg$$

$$\Phi_{SC} \equiv \Phi_{CS} + \pi \qquad \Phi_{SC} = 328.3686\,deg$$

$$\Phi_{DS} \equiv \Phi_{DC} - [\pi - (\zeta + \xi)] \qquad \Phi_{DS} = 179.3976\,deg$$

$$\Phi_{SD} \equiv \Phi_{DS} + \pi \qquad \Phi_{SD} = 359.3976\,deg$$

7) Calcolo delle coordinate del secondo punto di collins "S"

$$X_S \equiv X_C + CS \cdot \sin(\Phi_{CS}) \qquad X_S = 1958.05\,m$$

$$Y_S \equiv Y_C + CS \cdot \cos(\Phi_{CS}) \qquad Y_S = -293.38\,m$$

e per verifica:

$$X_{Sv} \equiv X_D + DS \cdot \sin(\Phi_{DS}) \qquad X_{Sv} = 1958.05\,m$$

$$Y_{Sv} \equiv Y_D + DS \cdot \cos(\Phi_{DS}) \qquad Y_{Sv} = -293.38\,m$$

NOTA: si osserva che essendo state calcolate le coordinate di "Q" e di "S", la figura potrebbe essere ora eseguita in scala e utilizzata come disegno. Si ricorda inoltre che dal disegno possono essere lette, in scala, le coordinate dei punti "P" ed "R". Qualora il disegno fosse eseguito mediante procedura CAD allora potrebbero essere letti su di esso i risultati del problema con precisine adeguata.

8) Calcolo dell'azimut e del controazimut della retta passante per i punti "P" "Q", "R" e "S"

$$\Phi_{QS} \equiv \operatorname{atan}\left(\frac{X_S - X_Q}{Y_S - Y_Q}\right) + \pi \qquad \Phi_{QS} = 102.1946\,\text{deg}$$

$$\Phi_{SQ} \equiv \Phi_{QS} + \pi \qquad \Phi_{SQ} = 282.1946\,\text{deg}$$

9) Calcolo degli elementi del triangolo QAP

$$\Phi_{QP} \equiv \Phi_{SQ} \qquad \Phi_{QP} = 282.1946\,\text{deg}$$

$$\delta \equiv \Phi_{QA} - \Phi_{QP} \qquad \delta = 24.5111\,\text{deg}$$

$$\rho \equiv 2\pi - \alpha \qquad \rho = 111.5690\,\text{deg}$$

$$AP \equiv \frac{AQ \cdot \sin(\delta)}{\sin(\rho)} \qquad AP = 254.86\,\text{m}$$

$$QP \equiv \frac{AQ \cdot \sin(\rho + \delta)}{\sin(\rho)} \qquad QP = 426.11\,\text{m}$$

10) Calcolo degli elementi del triangolo QBP

$$\eta \equiv \Phi_{QB} - \Phi_{QP} + 2\pi \qquad \eta = 82.7236\,\text{deg}$$

$$\nu \equiv 2\pi - \beta \qquad \nu = 53.3565\,\text{deg}$$

$$BP \equiv \frac{BQ \cdot \sin(\eta)}{\sin(\nu)} \qquad BP = 609.36\,\text{m}$$

e per verifica

$$QP_v \equiv \frac{BQ \cdot \sin(\eta + \nu)}{\sin(\nu)} \qquad QP_v = 426.11\,\text{m}$$

11) Calcolo degli azimut dei lati AP e BP

$$\Phi_{AP} \equiv \Phi_{AQ} + \left[\pi - \left(\delta + \rho\right)\right] \qquad \Phi_{AP} = 170.6256\,deg$$

$$\Phi_{BP} \equiv \Phi_{BQ} + \left[\pi - \left(\eta + \nu\right)\right] \qquad \Phi_{BP} = 228.8381\,deg$$

12) Calcolo delle coordinate del punto "P"

$$X_P \equiv X_A + AP \cdot \sin\left(\Phi_{AP}\right) \qquad X_P = 141.92\,m$$

$$Y_P \equiv Y_A + AP \cdot \cos\left(\Phi_{AP}\right) \qquad Y_P = 99.10\,m$$

e per verifica

$$X_{Pv} \equiv X_B + BP \cdot \sin\left(\Phi_{BP}\right) \qquad X_{Pv} = 141.92\,m$$

$$Y_{Pv} \equiv Y_B + BP \cdot \cos\left(\Phi_{BP}\right) \qquad Y_{Pv} = 99.10\,m$$

13) Calcolo degli elementi del triangolo SCR

$$\Phi_{SR} \equiv \Phi_{SQ} \qquad \Phi_{SR} = 282.1946\,deg$$

$$\sigma \equiv \Phi_{SC} - \Phi_{SR} \qquad \sigma = 46.1740\,deg$$

$$\lambda \equiv \pi - \phi \qquad \lambda = 83.1455\,deg$$

$$CR \equiv \frac{CS \cdot \sin\left(\sigma\right)}{\sin\left(\lambda\right)} \qquad CR = 634.48\,m$$

$$RS \equiv \frac{CS \cdot \sin\left(\lambda + \sigma\right)}{\sin\left(\lambda\right)} \qquad RS = 680.37\,m$$

14) Calcolo degli elementi del triangolo SDR

$$\mu \equiv \Phi_{SD} - \Phi_{SR} + 2\pi \qquad \mu = 437.2030\,deg$$

$$\omega \equiv \pi - \psi \qquad \omega = 52.1165\,deg$$

$$DR \equiv \frac{DS \cdot \sin(\mu)}{\sin(\omega)} \qquad DR = 857.61\,m$$

e per verifica

$$RS_v \equiv \frac{DS \cdot \sin(\omega + \mu)}{\sin(\omega)} \qquad RS_v = 680.37\,m$$

15) Calcolo degli azimut dei lati CR e DR

$$\Phi_{CR} \equiv \Phi_{CS} + [\pi - (\sigma + \lambda)] \qquad \Phi_{CR} = 199.0491\,deg$$

$$\Phi_{DR} \equiv \Phi_{DS} + [\pi - (\mu + \omega)] \qquad \Phi_{DR} = -129.9219\,deg$$

16) Calcolo delle coordinate del punto "R"

$$X_R \equiv X_C + CR \cdot \sin(\Phi_{CR}) \qquad X_R = 1293.03\,m$$

$$Y_R \equiv Y_C + CR \cdot \cos(\Phi_{CR}) \qquad Y_R = -149.67\,m$$

e per verifica

$$X_{Rv} \equiv X_D + DR \cdot \sin(\Phi_{DR}) \qquad X_{Rv} = 1293.03\,m$$

$$Y_{Rv} \equiv Y_D + DR \cdot \cos(\Phi_{DR}) \qquad Y_{Rv} = -149.67\,m$$